Chap. 5 : Suites numériques (extrait)

Auteur de ce document :

Geoffrey LESCAUX

(professeur certifié de mathématiques)

contact : geoffrey.lescaux@yahoo.fr

version 2 du 18 août 2021

Sommaire

1) Calcul d'une valeur approchée de ln(2)

a) Approximation de ln(2) par le produit de Seidel

Théorème : formule du produit de Seidel [1]

● Pour tout réel $x > 0$, on considère la suite $\left(u_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{1+x^{1/2^k}} = \frac{2}{1+x^{1/2}} \times \frac{2}{1+x^{1/4}} \times \frac{2}{1+x^{1/8}} \times \dots \times \frac{2}{1+x^{1/2^n}}$$
$$= \frac{2}{1+\sqrt{x}} \times \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{x}}} \times \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}} \times \dots \times \frac{2}{1+x^{1/2^n}}$$

Alors la suite (u_n) converge vers $\frac{\ln x}{x-1}$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

(si $x = 1$, on remplace $\frac{\ln x}{x-1}$ par sa limite 1).

● Si $x = 2$, la suite $\left(u_n(2)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n(1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{1+2^{1/2^k}} = \frac{2}{1+2^{1/2}} \times \frac{2}{1+2^{1/4}} \times \frac{2}{1+2^{1/8}} \times \dots \times \frac{2}{1+2^{1/2^n}}$$
$$= \frac{2}{1+\sqrt{2}} \times \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{2}}} \times \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} \times \dots \times \frac{2}{1+2^{1/2^n}}$$

est strictement décroissante et converge vers le logarithme népérien de 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2 \approx 0{,}6931471806$$

Démonstration

http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?2,244589

http://people.math.binghamton.edu/dikran/478/Ch6.pdf (§6.1.3)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On introduire son cosinus hyperbolique et son sinus hyperbolique, définis par :

$$\begin{cases} \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

[1] Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896), mathématicien et physicien bavarois, a montré cette formule en 1871. https://fr.wikipedia.org/wiki/Philipp_Ludwig_von_Seidel

$$\frac{\sinh x}{x}=\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2-\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{2x}=\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)}{2x}=\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}\times\frac{\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$=\cosh\frac{x}{2}\times\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\sinh x}{x}=\cosh\frac{x}{2}\times\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

En remplaçant x par $\frac{x}{2}$, on obtient :

$$\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\cosh\frac{x}{2^2}\times\frac{\sinh\frac{x}{2^2}}{\frac{x}{2^2}}$$

En remplaçant x par $\frac{x}{2}$, on obtient :

$$\frac{\sinh\frac{x}{2^2}}{\frac{x}{2^2}}=\cosh\frac{x}{2^3}\times\frac{\sinh\frac{x}{2^3}}{\frac{x}{2^3}}$$

En remplaçant x par $\frac{x}{2}$, on obtient :

$$\frac{\sinh\frac{x}{2^3}}{\frac{x}{2^3}}=\cosh\frac{x}{2^4}\times\frac{\sinh\frac{x}{2^4}}{\frac{x}{2^4}}$$

Plus généralement, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\sinh\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=\cosh\frac{x}{2^{n+1}}\times\frac{\sinh\frac{x}{2^{n+1}}}{\frac{x}{2^{n+1}}}$$

En effet :

$$\frac{\sinh\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=\frac{\frac{e^{\frac{x}{2^n}}-e^{-\frac{x}{2^n}}}{2}}{\frac{x}{2^n}}=\frac{\frac{e^{\frac{2x}{2^{n+1}}}-e^{-\frac{2x}{2^{n+1}}}}{2}}{\frac{2x}{2^{n+1}}}=\frac{\left(e^{\frac{x}{2^{n+1}}}\right)^2-\left(e^{-\frac{x}{2^{n+1}}}\right)^2}{\frac{2\times 2x}{2^{n+1}}}$$

$$=\frac{\left(e^{\frac{x}{2^{n+1}}}+e^{-\frac{x}{2^{n+1}}}\right)\left(e^{\frac{x}{2^{n+1}}}-e^{-\frac{x}{2^{n+1}}}\right)}{\frac{2\times 2x}{2^{n+1}}}=\frac{e^{\frac{x}{2^{n+1}}}+e^{-\frac{x}{2^{n+1}}}}{2}\times\frac{\frac{e^{\frac{x}{2^{n+1}}}-e^{-\frac{x}{2^{n+1}}}}{2}}{\frac{x}{2^{n+1}}}$$

$$=\cosh\frac{x}{2^{n+1}}\times\frac{\sinh\frac{x}{2^{n+1}}}{\frac{x}{2^{n+1}}}$$

$$\frac{\sinh x}{x} = \cosh\frac{x}{2} \times \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \cosh\frac{x}{2} \times \cosh\frac{x}{2^2} \times \frac{\sinh\frac{x}{2^2}}{\frac{x}{2^2}}$$

$$= \cosh\frac{x}{2} \times \cosh\frac{x}{2^2} \times \cosh\frac{x}{2^3} \times \frac{\sinh\frac{x}{2^3}}{\frac{x}{2^3}}$$

$$= \cosh\frac{x}{2} \times \cosh\frac{x}{2^2} \times \cosh\frac{x}{2^3} \times \cosh\frac{x}{2^4} \times \frac{\sinh\frac{x}{2^4}}{\frac{x}{2^4}} = \cdots$$

$$= \frac{\sinh\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \times \prod_{k=1}^{n} \cosh\frac{x}{2^k}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\sinh x}{x} = \frac{\sinh\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \times \prod_{k=1}^{n} \cosh\frac{x}{2^k}$$

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \cosh\frac{x}{2^k}} = \frac{x}{\sinh x} \times \frac{\sinh\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\cosh\frac{x}{2^k}} = \frac{x}{\sinh x} \times \frac{\sinh\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}$$

$$\frac{x}{\sinh x} \times \frac{\sinh\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\cosh\frac{x}{2^k}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{\sinh x} \times \frac{\sinh\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\cosh\frac{x}{2^k}} \right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sinh\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = \lim_{u\to 0} \frac{\sinh u}{u} = 1$$

$$\frac{x}{\sinh x} = \lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\cosh\frac{x}{2^k}} \right)$$

Pour tout réel $x > 0$, il existe un unique réel θ tel que $x = \ln\theta \Leftrightarrow e^x = \theta$.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\theta - \theta^{-1}}{2} = \frac{\theta^2 - 1}{2\theta}$$

$$\frac{x}{\sinh x}=\frac{\ln\theta}{\frac{\theta^2-1}{2\theta}}=\frac{2\theta\ln\theta}{\theta^2-1}=\frac{2\theta\ln\theta}{(\theta-1)(\theta+1)}$$

$$\cosh\frac{x}{2^k}=\frac{e^{\frac{x}{2^k}}+e^{-\frac{x}{2^k}}}{2}=\frac{(e^x)^{\frac{1}{2^k}}+(e^{-x})^{\frac{1}{2^k}}}{2}=\frac{\theta^{\frac{1}{2^k}}+(\theta^{-1})^{\frac{1}{2^k}}}{2}=\frac{\theta^{\frac{1}{2^k}}+\theta^{-\frac{1}{2^k}}}{2}$$
$$=\frac{\theta^{\frac{1}{2^k}}\theta^{\frac{1}{2^k}}+\theta^{\frac{1}{2^k}}\theta^{-\frac{1}{2^k}}}{2\theta^{\frac{1}{2^k}}}=\frac{\theta^{\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}}+\theta^{\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^k}}}{2\theta^{\frac{1}{2^k}}}=\frac{\theta^{\frac{2}{2^k}}+\theta^0}{2\theta^{\frac{1}{2^k}}}=\frac{\theta^{\frac{1}{2^{k-1}}}+1}{2\theta^{\frac{1}{2^k}}}$$

$$\frac{1}{\cosh\frac{x}{2^k}}=\frac{2\theta^{\frac{1}{2^k}}}{\theta^{\frac{1}{2^{k-1}}}+1}$$

On a vu que

$$\frac{x}{\sinh x}=\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\cosh\frac{x}{2^k}}\right)$$

$$\frac{2\theta\ln\theta}{(\theta-1)(\theta+1)}=\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2\theta^{\frac{1}{2^k}}}{\theta^{\frac{1}{2^{k-1}}}+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\theta^{\frac{1}{2^k}}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^{k-1}}}+1}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{n}\theta^{\frac{1}{2^k}}=\theta^{\frac{1}{2^1}}\times\theta^{\frac{1}{2^2}}\times\theta^{\frac{1}{2^3}}\times\ldots\times\theta^{\frac{1}{2^n}}=\theta^{\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\theta^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}$$

On utilise la formule donnant la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1\text{er terme}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{nombre de termes}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=1-0=1$$

$$\frac{2\theta\ln\theta}{(\theta-1)(\theta+1)}=\lim_{n\to+\infty}\left(\theta^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^{k-1}}}+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\theta^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}\right)\times\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^{k-1}}}+1}\right)=\theta^1\times\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^{k-1}}}+1}\right)$$

Dans le produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^{k-1}}}+1}$, on effectue le changement de variable $p = k - 1$.

Lorsque k varie de 1 à n, $p = k - 1$ varie de 0 à $n - 1$.

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^{k-1}}}+1} = \prod_{p=0}^{n-1} \frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^p}}+1} = \frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^0}}+1} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^p}}+1} = \frac{2}{\theta^1+1} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^p}}+1}$$
$$= \frac{2}{\theta+1} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^p}}+1}$$

$$\frac{2\theta \ln \theta}{(\theta-1)(\theta+1)} = \theta \times \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{\theta+1} \prod_{p=1}^{n-1} \frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^p}}+1} \right) = \theta \times \frac{2}{\theta+1} \times \lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{p=1}^{n-1} \frac{2}{\theta^{\frac{1}{2^p}}+1} \right)$$

$$\frac{\ln \theta}{\theta-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{p=1}^{n-1} \frac{2}{1+\theta^{\frac{1}{2^p}}} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{p=1}^{n} \frac{2}{1+\theta^{\frac{1}{2^p}}} \right) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{1+\theta^{\frac{1}{2^p}}}$$

$\frac{\ln \theta}{\theta-1}$ est la limite quand $n \to +\infty$ du produit :

$$\prod_{p=1}^{n} \frac{2}{1+\theta^{\frac{1}{2^p}}} = \frac{2}{1+\theta^{1/2}} \times \frac{2}{1+\theta^{1/4}} \times \frac{2}{1+\theta^{1/8}} \times \dots \times \frac{2}{1+\theta^{1/2^n}}$$
$$= \frac{2}{1+\sqrt{\theta}} \times \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\theta}}} \times \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{\theta}}}} \times \dots \times \frac{2}{1+\theta^{1/2^n}}$$

b) Approximation de ln(2) par les sommes de Riemann des 1/(*n*+*k*) pour *k* allant de 0 à *n*-1 ou de 1 à *n*

Définition

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **sommes de Riemann** d'ordre n associée à f les sommes :

$$r_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \frac{b-a}{n}\left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

$$s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \frac{b-a}{n}\left[f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 3\frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + n\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

Théorème : convergence des sommes de Riemann

Les suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers l'intégrale de f entre a et b.

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(t)dt$$

Démonstration

Voir p.635 dans MPSI, mathématiques tout-en-un, Dunod, 4e édition, 2015

Théorème : approximation de ln $\frac{b}{a}$ par des sommes de Riemman

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}+k} = \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}} + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}+1} + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}+2} + \dots + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}+n-1}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}+k} = \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}+1} + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}+2} + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}+3} + \dots + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}+n}$$

Alors les suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers le logarithme népérien de $\frac{b}{a}$.

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \ln\frac{b}{a}$$

Démonstration

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

On applique le théorème ci-dessus à la fonction inverse $f : x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$.

La fonction inverse f est continue par morceaux sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes de Riemann d'ordre n associée à f sont les sommes :

$$r_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a + k\frac{b-a}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{b-a}{n}}{a + k\frac{b-a}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a\frac{n}{b-a} + k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1} + k} = \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}} + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1} + 1} + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1} + 2} + \cdots + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1} + n - 1}$$

$$s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1} + k}$$

$$= \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1} + 1} + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1} + 2} + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1} + 3} + \cdots + \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1} + n}$$

Les suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers le logarithme l'intégrale de f entre a et b.

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b \frac{1}{t}dt = [\ln t]_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$$

Théorème : approximation de ln x par des sommes de Riemman

Pour tout réel $x > 1$, on considère les suites $\big(r_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(s_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$
définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{1}{x-1}n + k} = \frac{1}{\frac{1}{x-1}n} + \frac{1}{\frac{1}{x-1}n + 1} + \frac{1}{\frac{1}{x-1}n + 2} + \cdots + \frac{1}{\frac{1}{x-1}n + n - 1}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{x-1}n + k} = \frac{1}{\frac{1}{x-1}n + 1} + \frac{1}{\frac{1}{x-1}n + 2} + \frac{1}{\frac{1}{x-1}n + 3} + \cdots + \frac{1}{\frac{1}{x-1}n + n}$$

Les suites $\big(r_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(s_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers le logarithme népérien de x.

$$\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \ln x$$

Démonstration

Soit un réel $x > 1$. On applique le théorème ci-dessus avec $a = 1$ et $b = x$.

Les réels $a = 1$ et $b = x$ vérifient $a < b$ puisque $1 < x$.

On considère les suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{n}{\frac{x}{1}-1}+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{n}{x-1}+k}$$
$$= \frac{1}{\frac{n}{x-1}} + \frac{1}{\frac{n}{x-1}+1} + \frac{1}{\frac{n}{x-1}+2} + \cdots + \frac{1}{\frac{n}{x-1}+n-1}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{n}{\frac{b}{a}-1}+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{n}{x-1}+k}$$
$$= \frac{1}{\frac{n}{x-1}+1} + \frac{1}{\frac{n}{x-1}+2} + \frac{1}{\frac{n}{x-1}+3} + \cdots + \frac{1}{\frac{n}{x-1}+n}$$

Les suites $\left(r_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cet $\left(s_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers le logarithme népérien de $\frac{x}{1} = x$.

$$\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x) = \ln\frac{x}{1} = \ln x$$

Exemple si $x = 2$

Les suites $\left(r_n(2)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(s_n(2)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$r_n(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{1}{2-1}n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{1}{1}n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$
$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n-1}$$

$$s_n(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

convergent vers le logarithme népérien de 2.

$$\lim_{n\to+\infty} r_n(2) = \lim_{n\to+\infty} r_n(2) = \ln 2 \approx 0{,}6931471806$$

Démonstration de l'exemple si $x = 2$ sans utilisant le théorème ci-dessus

https://www.ilemaths.net/sujet-une-suite-qui-converge-vers-ln2-119013.html

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

1. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3.

2.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

b) En déduire les variations de la suite (u_n).

3. On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln x - (x-1)$$

a) Etudier les variations de f et g.

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.

c) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p+1} \leq \ln \frac{p+1}{p} \leq \frac{1}{p}$

4.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire l'encadrement de la question **3.c)** en donnant successivement à p les valeurs n, $n+1$, $n+2$, …, $n+n$.

b) En sommant l'encadrement de la question **3.c)** pour p allant de n à $2n-1$, montrer que

$$u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

5. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ln 2$.

Solution

1.

$$u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1}$$

$$u_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{n+2+n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$$

$$u_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}$$

$$= \frac{(n+2)(n+3)+(n+1)(n+3)+(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n^2+5n+6+n^2+4n+3+n^2+3n+2}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3n^2+12n+11}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Sur la 1ère somme, on effectue le changement de variable : $p = k + 1$.

Lorsque k varie de 1 à $n+1$, $p = k+1$ varie de 2 à $n+2$

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{p=2}^{n+2} \frac{1}{n+p} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{n+p} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{2}{2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{2(n+1)-(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{2n+2-2n-1}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} > u_n$$

La suite (u_n) est strictement croissante.

3. a) Les fonctions f et g définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln x - (x - 1)$$

sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \text{ est du signe de } (x-1)$$

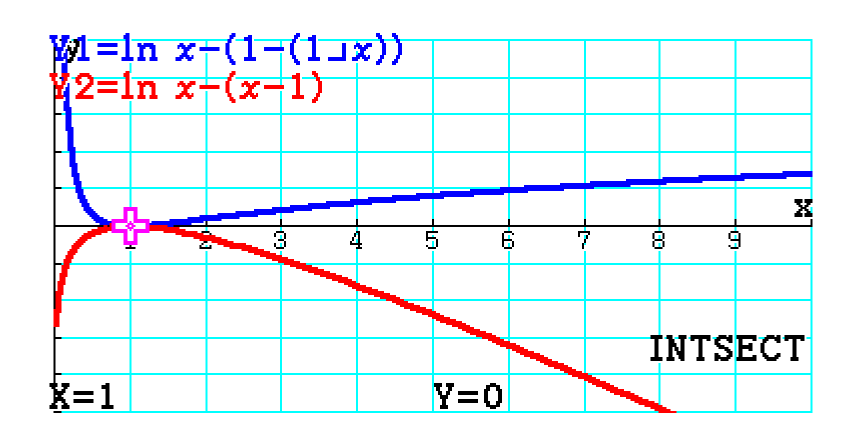
$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x} - \frac{x}{x} = \frac{1-x}{x} \text{ est du signe de } (1-x)$$

$$f(1) = \ln 1 - \left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0 - 0 = 0$$

$$g(1) = \ln 1 - (1 - 1) = 0 - 0 = 0$$

x	0	1	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$		$+$
variation de f	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

x	0	1	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$
variation de g	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$



b) Pour tout $x \in\ ]0\,;\,+\infty[$,

$$f(x) = \ln x - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \ln x - (x-1) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x \leq x - 1$$

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$$

c) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si $x = \frac{p+1}{p} = 1 + \frac{1}{p}$, alors

$$x - 1 = \frac{1}{p}$$

et

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{p+1}{p+1} - \frac{p}{p+1} = \frac{p+1-p}{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

L'encadrement

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$$

devient

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln \frac{p+1}{p} \leq \frac{1}{p}$$

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrivons l'encadrement de la question **3.c)** en donnant successivement à p les valeurs n, $n+1$, $n+2$, …, $n+n-1$.

si $p = n$, $$\frac{1}{n+1} \leq \ln \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

si $p = n+1$, $$\frac{1}{n+2} \leq \ln \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

si $p = n+2$, $$\frac{1}{n+3} \leq \ln \frac{n+3}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

…

si $p = n+n-1 = 2n-1$, $$\frac{1}{2n} \leq \ln \frac{2n}{2n-1} \leq \frac{1}{2n-1}$$

b) Si on somme les encadrements

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln \frac{p+1}{p} \leq \frac{1}{p}$$

pour p allant de n à $2n-1$, on obtient :

$$\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=n}^{2n-1} \ln \frac{p+1}{p} \leq \sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p}$$

● Dans la somme de gauche $\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p+1}$, on effectue le changement de variable $k = p + 1 - n$ de sorte que $p + 1 = n + k$. Lorsque p varie de n à $2n-1$, $k = p + 1 - n$ varie de $n + 1 - n = 1$ à
$2n - 1 + 1 - n = n$.

$$\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

$$\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p+1} = u_n$$

● Dans la somme de droite $\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p}$, on effectue le changement de variable $k = p - n$ de sorte que $p = n + k$. Lorsque p varie de n à $2n - 1$, $k = p - n$ varie de $n - n = 0$ à $2n - 1 - n = n - 1$.

$$\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+0} - \frac{1}{n+n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + u_n = \frac{2}{2n} - \frac{1}{2n} + u_n = \frac{1}{2n} + u_n$$

$$\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p} = u_n + \frac{1}{2n}$$

● La somme centrale est :

$$\sum_{p=n}^{2n-1} \ln \frac{p+1}{p} = \sum_{p=n}^{2n-1} [\ln(p+1) - \ln p] = \sum_{p=n}^{2n-1} \ln(p+1) - \sum_{p=n}^{2n-1} \ln p$$

Dans la somme $\sum_{p=n}^{2n-1} \ln(p+1)$, on effectue le changement de variable $k = p + 1$.
Lorsque p varie de n à $2n - 1$, $k = p + 1$ varie de $n + 1$ à $2n$.

$$\sum_{p=n}^{2n-1} \ln \frac{p+1}{p} = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - \sum_{p=n}^{2n-1} \ln p = \sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln k + \ln(2n) - \ln n - \sum_{p=n+1}^{2n-1} \ln p$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln k = \sum_{p=n+1}^{2n-1} \ln p$$

$$\sum_{p=n}^{2n-1} \ln \frac{p+1}{p} = \ln(2n) - \ln n = \ln \frac{2n}{n} = \ln 2$$

$$\sum_{p=n}^{2n-1} \ln \frac{p+1}{p} = \ln 2$$

L'encadrement

$$\sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=n}^{2n-1} \ln \frac{p+1}{p} \leq \sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p}$$

devient

$$u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

$$\ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n} \Longrightarrow -\frac{1}{2n} + \ln 2 \leq u_n$$

$$-\frac{1}{2n} + \ln 2 \leq u_n \leq \ln 2$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2n}\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2n} + \ln 2\right) = \ln 2$$

$$\lim_{n \to +\infty} \ln 2 = 0$$

La suite (u_n) est encadrée par deux suites qui convergent $\ln 2$, donc d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers $\ln 2$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$$

c) Approximation de ln(2) par la somme de Brouncker de 1/[(2*k*-1)(2*k*)] pour *k* allant de 1 à *n*

Théorème

● Pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on considère la suite $\left(b_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$b_n(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x^{2k-1}}{2k-1} - \frac{x^{2k}}{2k}\right)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n}$$

Alors la suite $\left(b_n(x)\right)$ converge vers le logarithme népérien de $(1+x)$:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n(x) = \ln(1+x)$$

● Si $x = 1$, la suite $\left(b_n(1)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$b_n(1) = \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{(-1)^i}{i+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\times 2k} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times 2n}$$

est strictement croissante et converge vers le logarithme népérien de 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n(x) = \ln 2 \approx 0{,}6931471806$$

Remarque : on montre en annexe p.40 que la suite $b_n(1)$ est égale à la somme de Riemann

$$s_n(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

Démonstration

● 1er point

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on sait que la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = x^n$, qui est la suite géométrique de raison x et de premier terme 1, vaut

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad (E)$$

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \frac{x}{1-x} = x^n \varepsilon(x)$$

où la fonction ε, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$, tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\varepsilon(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

C'est le développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

En remplaçant x par $-x$, la relation (E) devient, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

$$\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} = x^n \frac{(-1)^{n+1} x}{1+x} = x^n \theta(x)$$

où la fonction θ, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $\theta(x) = \frac{(-1)^{n+1} x}{1+x}$, tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

$$\lim_{x \to 0} \theta(x) = 0$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n \theta(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \theta(x)$$

C'est le développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$.

Le développement limité en 0 à l'ordre $n-1$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ est :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n x^n + x^n \theta(x)$$

$$(-1)^n x^n + x^n \theta(x) = x^{n-1}[(-1)^n x + x\theta(x)] = x^{n-1} \sigma(x)$$

où la fonction σ, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $\sigma(x) = (-1)^n x + x\theta(x)$, tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

$$\lim_{x \to 0} \sigma(x) = 0$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + x^{n-1} \sigma(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + x^{n-1} \sigma(x)$$

Sur $]-1\,;\,+\infty[$, la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$, qui est une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$, admet en 0 un développement limité à l'ordre n qu'on obtient en prenant les primitives de chacun des termes du développement limité à l'ordre $n-1$ de $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$, auquel on ajoute la constante d'intégration $\ln(1+0) = \ln(1) = 0$. On obtient :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + x^n \tau(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \tau(x)$$

où la fonction τ vérifie

$$\lim_{x \to 0} \tau(x) = 0$$

C'est le développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$.

Le développement limité en 0 à l'ordre $2n$ de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est :

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} + x^{2n}\tau(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{2n-2}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n} + x^{2n}\tau(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n} + x^{2n}\tau(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^{2k-1}}{2k-1} - \frac{x^{2k}}{2k}\right) + x^{2n}\tau(x)\end{aligned}$$

Pour tout $x \in]-1\,;1[$, $x^2 \in]0\,;1[$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} x^{2n} = \lim_{n\to+\infty} (x^2)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^{2k-1}}{2k-1} - \frac{x^{2k}}{2k}\right) = \ln(1+x)$$

Si on fait tendre x vers 1 par valeurs inférieurs, on obtient par continuité :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \frac{1}{i+1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \ln(1+1) = \ln(2)$$

Conclusion : pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on considère la suite $\big(b_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{aligned}b_n(x) &= \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^{2k-1}}{2k-1} - \frac{x^{2k}}{2k}\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n}\end{aligned}$$

Alors la suite $\big(b_n(x)\big)$ converge vers le logarithme népérien de $(1+x)$:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n(x) = \ln(1+x)$$

● 2e point

Si $x = 1$, la suite $\big(b_n(1)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{aligned}b_n(1) &= \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{(-1)^i}{i+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\times 2k} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times 2n}\end{aligned}$$

est strictement croissante et converge vers le logarithme népérien de 2 :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n(x) = \ln 2 \approx 0{,}6931471806$$

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{2k}{(2k-1)\times 2k} - \frac{2k-1}{(2k-1)\times 2k} = \frac{2k-2k+1}{(2k-1)\times 2k} = \frac{1}{(2k-1)\times 2k}$$

Méthode de Brouncker

La convergence de $b_n(1)$ vers ln 2 peut se retrouver par la méthode de Brouncker.

Pour tout réel $x > 0$, on considère l'intégrale

$$I(x) = \int_1^{1+x} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^{1+x} = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x) - 0 = \ln(1+x)$$

En particulier, si $x = 1$,

$$I(1) = \int_1^{2} \frac{1}{t} dt = \ln(1+1) = \ln(2)$$

L'algorithme de Brouncker[2] consiste à calculer une valeur approchée de l'intégrale $I(1)$, vue comme l'aire de la surface délimitée d'une part par l'axe des abscisses et la courbe (hyperbole) représentative de la fonction inverse, et d'autre part par les droites verticales d'équations respectives $y = 1$ et $y = 2$. Cette aire se calcule approximativement en sommant les aires de n rectangles R_1, R_2, R_3, …, R_n sous l'hyperbole.

Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, chaque rectangle R_k a pour longueur (ou base) L_k, largeur (ou hauteur) ℓ_k, et aire $\mathcal{A}_k = L_k \times \ell_k$.

On construit les rectangles en respectant deux règles :

● Chaque rectangle R_k a son sommet supérieur droit S_k sur l'hyperbole, donc $S_k\left(x_k\,;\, y_k = \frac{1}{x_k}\right)$.

● Chaque rectangle R_k a sa longueur L_k qui vaut la moitié de la longueur du rectangle sur lequel il est posé.

Chaque étape de construction consiste à poser, sur chacun des rectangles construits à l'étape précédentes, deux rectangles adjacents de même longueur : un rectangle à gauche de largeur non nulle, et un rectangle à droite de largeur nulle. Ainsi, pour tout $k \in [\![2\,;n]\!]$, il y a à droite du rectangle R_k de longueur L_k et de largeur $\ell_k \neq 0$ un rectangle R_k^0 de même longueur L_k et de largeur nulle.

Les rectangles R_k^0 doivent être pris en compte dans la construction, même si leur aire est nulle, car ils servent pour pouvoir poser dessus à gauche un rectangle d'aire non nulle à l'étape suivante.

Les rectangles sont indicés dans l'ordre décroissant de leurs aires, et non dans l'ordre de leur apparition dans la construction.

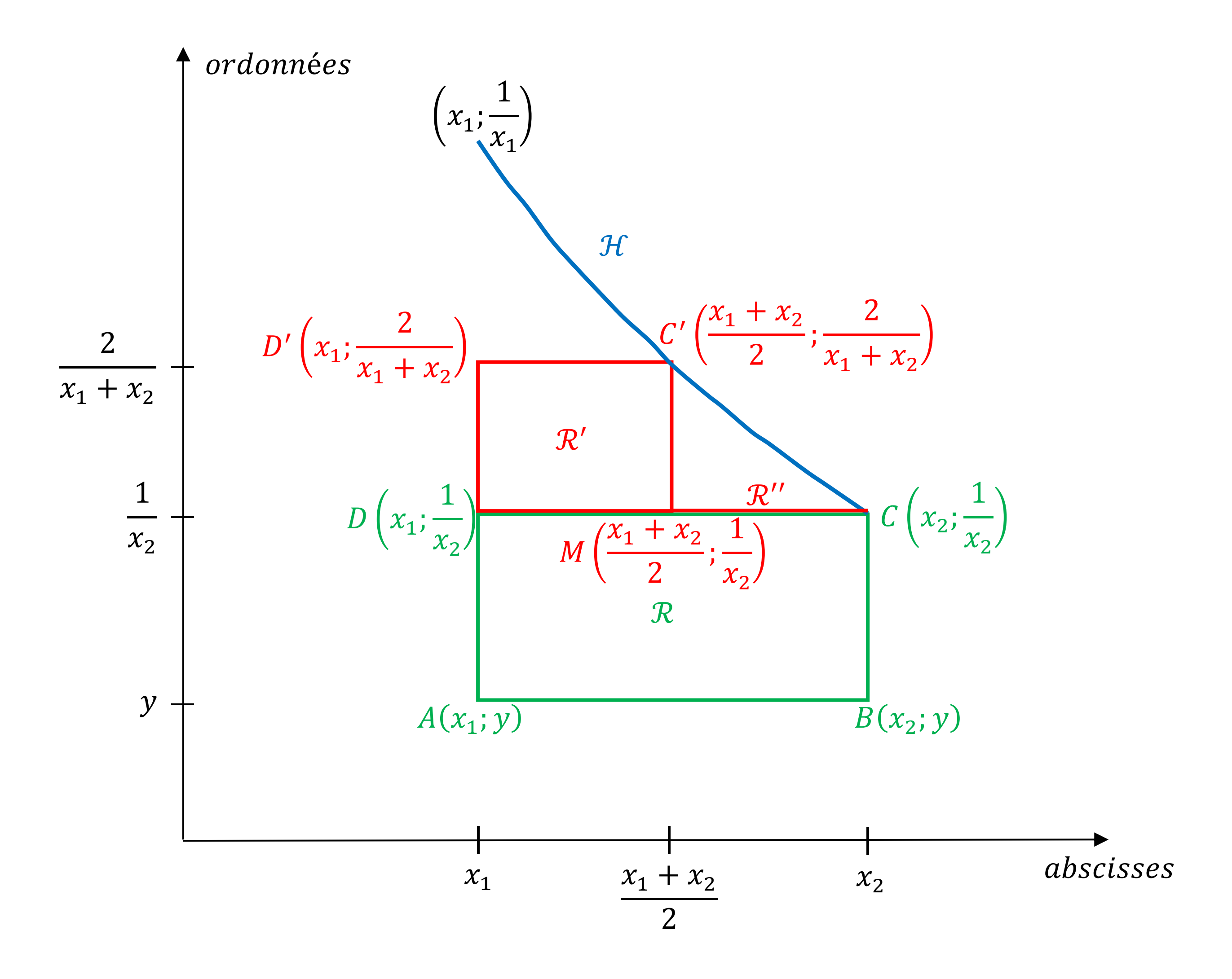
---

[2] Cet algorithme a été découvert par le mathématicien anglais William BROUNCKER (1620-1684) en 1668.
https://fr.wikipedia.org/wiki/William_Brouncker
https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/enseignement/analyse-autour-de-ln-1345111.kjsp

La méthode de Bruncker peut être résumée par le schéma ci-dessous.

À partir d'un rectangle $\mathcal{R} = ABCD$ dont le sommet supérieur droit C est sur l'hyperbole $\mathcal{H}$ représentant la fonction inverse, on construit à l'étape suivante le rectangle $\mathcal{R}' = DMC'D'$ et le rectangle aplati $\mathcal{R}'' = MCCM$ dont les sommets supérieurs droits respectifs C' et C sont sur l'hyperbole $\mathcal{H}$, et dont le sommet M est le milieu de $[DC]$.

Remarque : le rectangle $\mathcal{R} = ABCD$ peut être éventuellement aplati. Dans ce cas $A = D$, $B = C$, $\mathcal{R} = DCCD$.



Appliquons cette méthode à partir du rectangle $\mathcal{R}_1$ tel que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y = 0$.

n° étape	étape	rectangle R_k		
		longueur = base L_k	largeur = hauteur ℓ_k	aire $\mathcal{A}_k = L_k \times \ell_k$
1	On construit $\mathcal{R}_1$ qui repose sur l'axe des abscisses.	$L_1 = 1$	$\ell_1 = \frac{1}{2}$	$\mathcal{A}_1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2}$
2	Sur $\mathcal{R}_1$, on pose $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2^0$.	$L_2 = \frac{1}{2}$	$\ell_2 = \frac{1}{6}$	$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4}$
3	Sur $\mathcal{R}_2$, on pose $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_3^0$.	$L_3 = \frac{1}{4}$	$\ell_3 = \frac{2}{15}$	$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{30} = \frac{1}{5 \times 6}$
	Sur $\mathcal{R}_2^0$, on pose $\mathcal{R}_4$ et $\mathcal{R}_4^0$.	$L_4 = \frac{1}{4}$	$\ell_4 = \frac{1}{14}$	$\mathcal{A}_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{14} = \frac{1}{56} = \frac{1}{7 \times 8}$
4	Sur $\mathcal{R}_3$, on pose $\mathcal{R}_5$ et $\mathcal{R}_5^0$.	$L_5 = \frac{1}{8}$	$\ell_5 = \frac{4}{45}$	$\mathcal{A}_5 = \frac{1}{8} \times \frac{4}{45} = \frac{1}{90} = \frac{1}{9 \times 10}$
	Sur $\mathcal{R}_3^0$, on pose $\mathcal{R}_6$ et $\mathcal{R}_6^0$.	$L_6 = \frac{1}{8}$	$\ell_6 = \frac{2}{33}$	$\mathcal{A}_6 = \frac{1}{8} \times \frac{2}{33} = \frac{1}{132} = \frac{1}{11 \times 12}$
	Sur $\mathcal{R}_4$, on pose $\mathcal{R}_7$ et $\mathcal{R}_7^0$.	$L_7 = \frac{1}{8}$	$\ell_7 = \frac{4}{91}$	$\mathcal{A}_7 = \frac{1}{8} \times \frac{4}{91} = \frac{1}{182} = \frac{1}{13 \times 14}$
	Sur $\mathcal{R}_4^0$, on pose $\mathcal{R}_8$ et $\mathcal{R}_8^0$.	$L_8 = \frac{1}{8}$	$\ell_8 = \frac{1}{30}$	$\mathcal{A}_8 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{240} = \frac{1}{15 \times 16}$
5	Sur $\mathcal{R}_5$, on pose $\mathcal{R}_9$ et $\mathcal{R}_9^0$.	$L_9 = \frac{1}{16}$	$\ell_9 = \frac{8}{153}$	$\mathcal{A}_9 = \frac{1}{16} \times \frac{8}{153} = \frac{1}{306} = \frac{1}{17 \times 18}$
	Sur $\mathcal{R}_5^0$, on pose $\mathcal{R}_{10}$ et $\mathcal{R}_{10}^0$.	$L_{10} = \frac{1}{16}$	$\ell_{10} = \frac{4}{95}$	$\mathcal{A}_{10} = \frac{1}{16} \times \frac{4}{95} = \frac{1}{380} = \frac{1}{19 \times 20}$
	Sur $\mathcal{R}_6$, on pose $\mathcal{R}_{11}$ et $\mathcal{R}_{11}^0$.	$L_{11} = \frac{1}{16}$	$\ell_{11} = \frac{8}{231}$	$\mathcal{A}_{11} = \frac{1}{16} \times \frac{8}{231} = \frac{1}{462} = \frac{1}{21 \times 22}$
	Sur $\mathcal{R}_6^0$, on pose $\mathcal{R}_{12}$ et $\mathcal{R}_{12}^0$.	$L_{12} = \frac{1}{16}$	$\ell_{12} = \frac{2}{69}$	$\mathcal{A}_{12} = \frac{1}{16} \times \frac{2}{69} = \frac{1}{552} = \frac{1}{23 \times 24}$
	Sur $\mathcal{R}_7$, on pose $\mathcal{R}_{13}$ et $\mathcal{R}_{13}^0$.	$L_{13} = \frac{1}{16}$	$\ell_{13} = \frac{8}{325}$	$\mathcal{A}_{13} = \frac{1}{16} \times \frac{8}{325} = \frac{1}{650} = \frac{1}{25 \times 26}$
	Sur $\mathcal{R}_7^0$, on pose $\mathcal{R}_{14}$ et $\mathcal{R}_{14}^0$.	$L_{14} = \frac{1}{16}$	$\ell_{14} = \frac{4}{189}$	$\mathcal{A}_{14} = \frac{1}{16} \times \frac{4}{189} = \frac{1}{756} = \frac{1}{27 \times 28}$
	Sur $\mathcal{R}_8$, on pose $\mathcal{R}_{15}$ et $\mathcal{R}_{15}^0$.	$L_{15} = \frac{1}{16}$	$\ell_{15} = \frac{8}{435}$	$\mathcal{A}_{15} = \frac{1}{16} \times \frac{8}{435} = \frac{1}{870} = \frac{1}{29 \times 30}$
	Sur $\mathcal{R}_8^0$, on pose $\mathcal{R}_{16}$ et $\mathcal{R}_{16}^0$.	$L_{16} = \frac{1}{16}$	$\ell_{16} = \frac{1}{62}$	$\mathcal{A}_{16} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{62} = \frac{1}{992} = \frac{1}{31 \times 32}$
			somme des 16 aires =	0,6777662022

La somme de Brouncker de 16 premières aires vaut

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\frac{1}{90}+\frac{1}{132}+\frac{1}{182}+\frac{1}{240}+\frac{1}{306}$$
$$+\frac{1}{380}+\frac{1}{462}+\frac{1}{552}+\frac{1}{650}+\frac{1}{756}+\frac{1}{870}+\frac{1}{992}$$

0.6777662022

Elle est égale à la somme de Riemann, qui vaut :

$$s_n(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

Avec $n = 16$,

$$s_{16}(2) = \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{16+k}$$

$$= \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \frac{1}{29} + \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{32}$$

$$\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\frac{1}{24}+$$
$$\frac{1}{25}+\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\frac{1}{28}+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}+\frac{1}{31}+\frac{1}{32}$$

0.6777662022

L'égalité entre la somme de Brouncker et la somme de Riemann est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Avec $n = 10$, la somme de Brouncker des 10 premières aires vaut

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\frac{1}{90}+\frac{1}{132}+\frac{1}{182}+\frac{1}{240}+\frac{1}{306}+\frac{1}{380}$$

0.6687714032

Elle est égale à la somme de Riemann, qui vaut :

$$s_{10}(2) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{10+k} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}$$

0.6687714032

$$\frac{448372820160}{670442572800}$$

0.6687714032

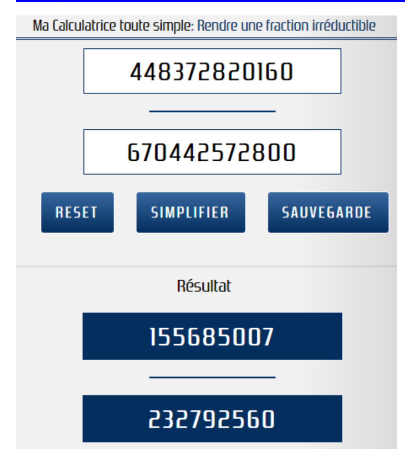
La fraction irréductible est :

$$\frac{155685007}{232792560}$$

0.6687714032

$$\frac{155685007}{232792560} = \frac{31 \times 5022097}{2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11}$$

https://www.ma-calculatrice.fr/fraction-irreductibles-simplifier.php



Le nombre de rectangles construits vaut :

- à l'étape 1 : 1
- à l'étape 2 : $2^0 = 1$
- à l'étape 3 : $2^1 = 2$
- à l'étape 4 : $2^2 = 4$
- à l'étape 5 : $2^3 = 8$
- à l'étape 6 : $2^4 = 16$
- …
- à l'étape m : 2^{m-2}

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le nombre total de rectangles construits en m étapes (c'est-à-dire avec $m-1$ étapes supplémentaires après l'étape 1) vaut :

$$N = 1 + \sum_{k=0}^{m-2} 2^k = 1 + \frac{1 - 2^{m-1}}{1-2} = 1 - (1 - 2^{m-1}) = 1 - 1 + 2^{m-1} = 2^{m-1}$$

$$N = 2^{m-1}$$

$$\ln N = \ln(2^{m-1}) = (m-1)\ln 2$$

$$m - 1 = \frac{\ln N}{\ln 2}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le nombre total d'étapes pour construire $N = 2^{m-1}$ rectangles vaut :

$$m = 1 + \frac{\ln N}{\ln 2}$$

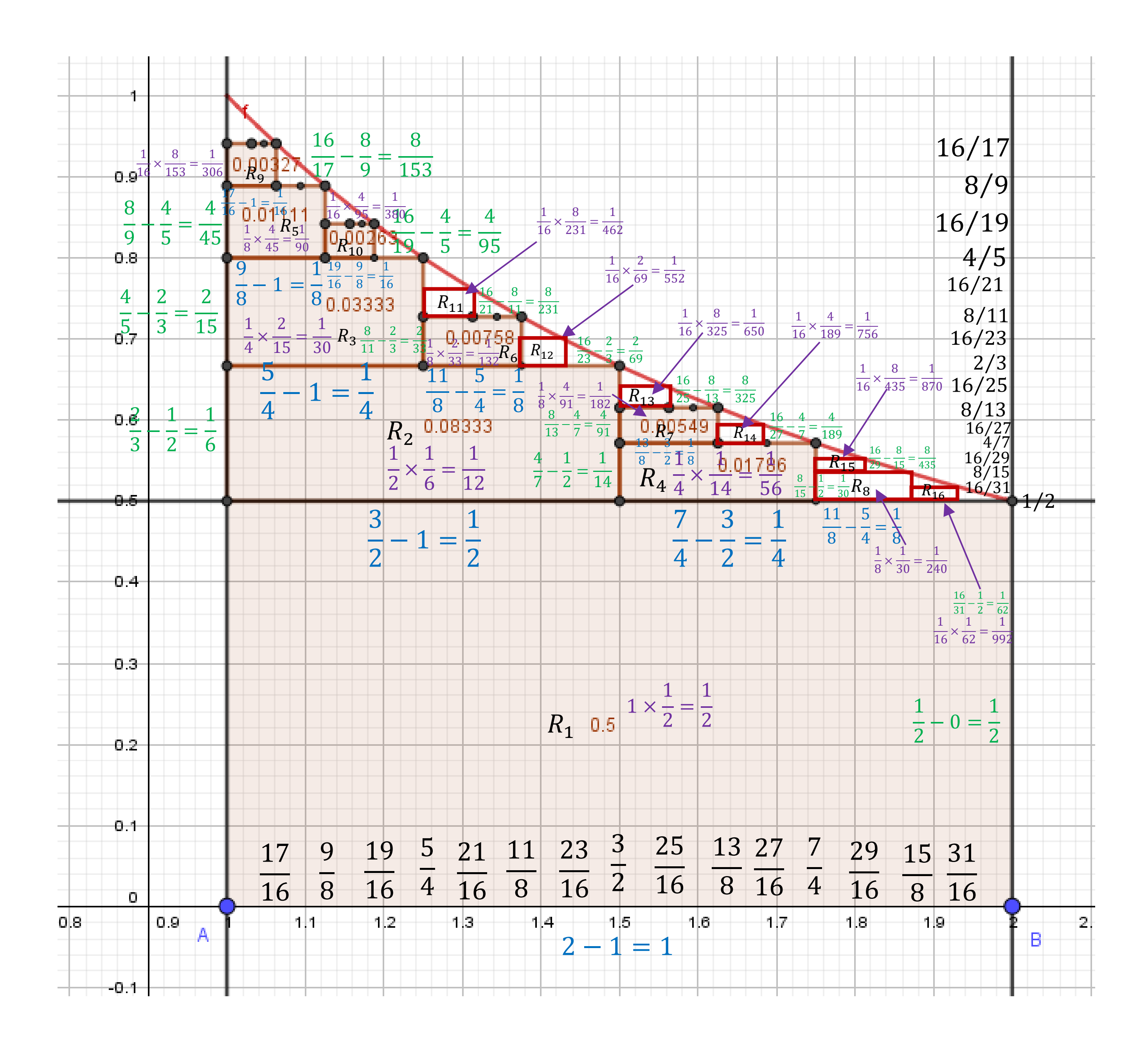
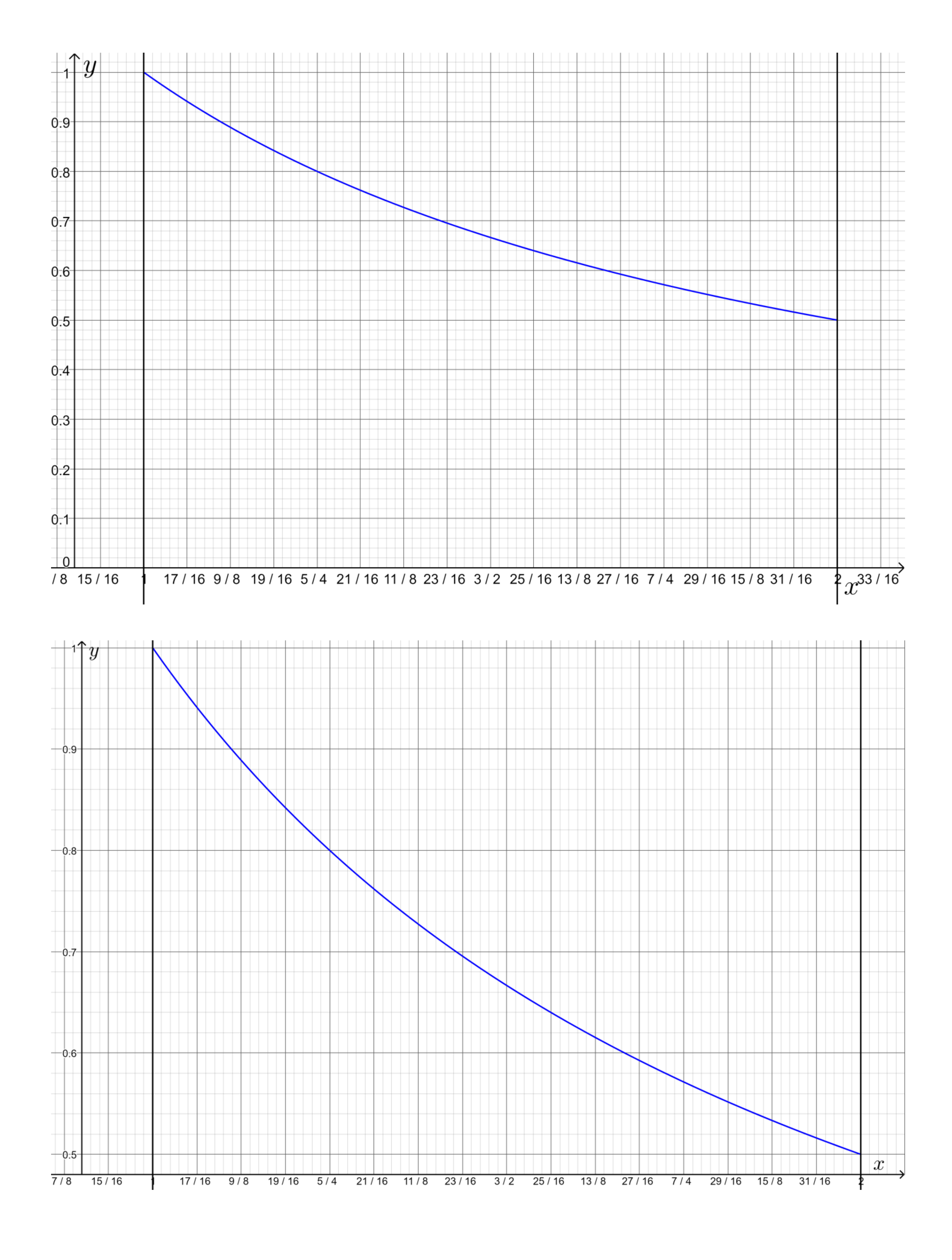
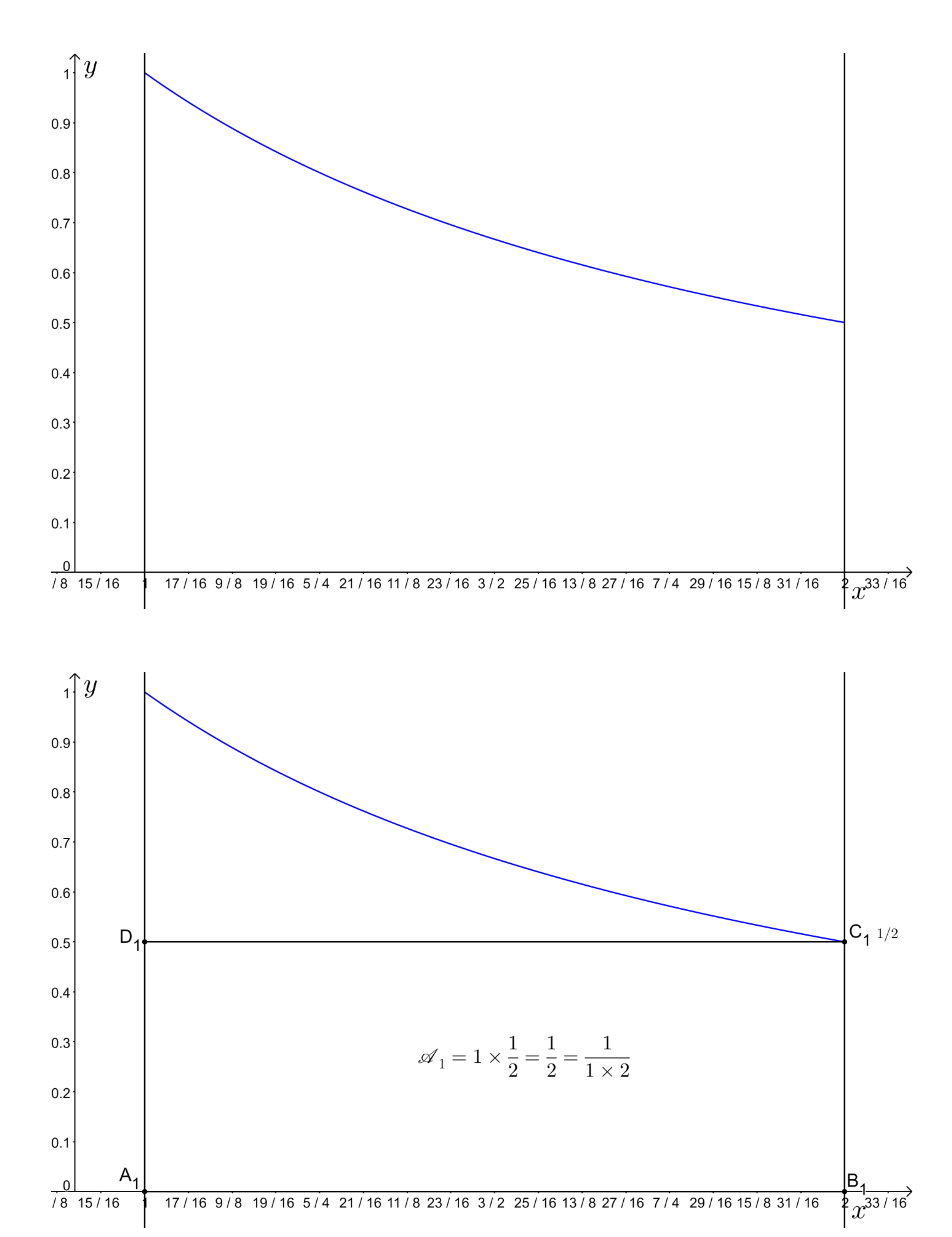


Figure : construction des rectangles selon la méthode de Brouncker

On a écrit en noir les coordonnées des points,

en bleu les longueurs, en vert les largeurs, en violet les aires.


y
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
/ 8
15 / 16
1
17 / 16
9 / 8
19 / 16
5 / 4
21 / 16
11 / 8
23 / 16
3 / 2
25 / 16
13 / 8
27 / 16
7 / 4
29 / 16
15 / 8
31 / 16
2
33 / 16
x
y
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
7 / 8
15 / 16
1
17 / 16
9 / 8
19 / 16
5 / 4
21 / 16
11 / 8
23 / 16
3 / 2
25 / 16
13 / 8
27 / 16
7 / 4
29 / 16
15 / 8
31 / 16
2
x


y
x
D1
C1
1/2
A1
B1
$\mathscr{A}_1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2}$

étape 1

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4}$$

$$\mathscr{A}_1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2}$$

étape 2

$$\mathscr{A}_3 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{30} = \frac{1}{5 \times 6}$$

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4}$$

$$\mathscr{A}_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{14} = \frac{1}{56} = \frac{1}{7 \times 8}$$

$$\mathscr{A}_1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2}$$

étape 3

$$\mathscr{A}_1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2}$$

$$\mathscr{A}_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4}$$

$$\mathscr{A}_3 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{30} = \frac{1}{5 \times 6}$$

$$\mathscr{A}_4 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{14} = \frac{1}{56} = \frac{1}{7 \times 8}$$

$$\mathscr{A}_5 = \frac{1}{8} \times \frac{4}{45} = \frac{1}{90} = \frac{1}{9 \times 10}$$

$$\mathscr{A}_6 = \frac{1}{8} \times \frac{2}{33} = \frac{1}{132} = \frac{1}{11 \times 12}$$

$$\mathscr{A}_7 = \frac{1}{8} \times \frac{4}{91} = \frac{1}{182} = \frac{1}{13 \times 14}$$

$$\mathscr{A}_8 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{240} = \frac{1}{15 \times 16}$$

étape 4

étape 4

étape 4

La somme des aires des 16 restangles vaut 0.677766202207527

étape 5

d) Algorithme du calcul approché de ln(2) par le produit de Seidel, les sommes de Riemann et la somme de Brouncker

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\ln 2 \approx 0{,}6931471806$ peut être approchée par :

● le produit de Seidel

$$u_n(1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{1+2^{1/2^k}} = \frac{2}{1+2^{1/2}} \times \frac{2}{1+2^{1/4}} \times \frac{2}{1+2^{1/8}} \times \dots \times \frac{2}{1+2^{1/2^n}}$$
$$= \frac{2}{1+\sqrt{2}} \times \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{2}}} \times \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} \times \dots \times \frac{2}{1+2^{1/2^n}}$$

● les sommes de Riemann

$$r_n(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n-1}$$

$$s_n(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

● la somme de Brouncker

$$b_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\times 2k} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times 2n}$$

L'approximation est d'autant plus précise que n est grand.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(1) = \lim_{n\to+\infty} r_n(2) = \lim_{n\to+\infty} s_n(2) = \lim_{n\to+\infty} b_n(1) = \ln 2 \approx 0{,}6931471806$$

La différence entre $s_n(2)$ et $b_n(1)$ est nulle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n(1) - s_n(2) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(2k-1)\times 2k} - \frac{1}{n+k}\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(n+k)}{(2k-1)\times 2k(n+k)} - \frac{(2k-1)\times 2k}{(2k-1)\times 2k(n+k)}\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n+k-(2k-1)\times 2k}{(2k-1)\times 2k(n+k)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n+k-4k^2+2k}{(2k-1)\times 2k(n+k)}\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n+3k-4k^2}{(2k-1)\times 2k(n+k)}\right] = 0$$

1. Écrire en langage universel, puis en langage Python, un algorithme ln 2 (n) qui, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   - renvoie les quatre valeurs $u_n(1)$, $r_n(2)$, $s_n(2)$, $b_n(1)$;
   - calcule leurs différences respectives à leur limite commune égale à ln 2 ;
   - donne la valeur plus précise de ln 2 ;
   - calcule la différence $b_n(1) - s_n(2)$, qui doit être nulle. On calculera cette différence de deux façons différentes : soit en calculant directement $b_n(1) - s_n(2)$, soit en calculant cette différence comme la somme de n termes :

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n + 3k - 4k^2}{(2k - 1) \times 2k(n + k)} \right]$$

2. Exécuter cet algorithme ln 2 (n) pour $n = 2^4 = 16$. Parmi les quatre valeurs $u_n(1)$, $r_n(2)$, $s_n(2)$, $b_n(1)$, laquelle est la plus proche de ln 2 $\approx 0{,}6931471806$?

Solution : 1. Algorithme en langage universel

Fonction ln 2 (n)

$1 \longleftarrow p$

$0 \longleftarrow r$

$0 \longleftarrow s$

$0 \longleftarrow b$

$0 \longleftarrow d$

Pour k allant de 1 à n **Faire**

$p = p \times \frac{2}{1+2^{1/2^k}}$

FinPour

Afficher : « Le produit de Seidel P_n, qui est le produit de $\frac{2}{1+2^{1/2^k}}$ pour k allant de 1 à n, vaut », p

Afficher : « $\ln 2 - P_n =$ », $\ln 2 - p$

Pour k allant de 0 à $n-1$ **Faire**

$r = r + \frac{1}{n+k}$

FinPour

Afficher : « La somme de Riemann R_n, qui est la somme de $\frac{1}{n+k}$ pour k allant de 0 à $n-1$, vaut », r

Afficher : « $\ln 2 - R_n =$ », $\ln 2 - r$

Pour k allant de 1 à n **Faire**

$s = s + \frac{1}{n+k}$

FinPour

Afficher : « La somme de Riemann S_n, qui est la somme de $\frac{1}{n+k}$ pour k allant de 1 à n, vaut », s

Afficher : « $\ln 2 - S_n =$ », $\ln 2 - s$

Pour k allant de 1 à n **Faire**

$b = b + \frac{1}{(2k-1)\times 2k}$

FinPour

Afficher : « La somme de Bruncker B_n, qui est la somme de $\frac{1}{(2k-1)\times 2k}$ pour k allant de 1 à n, vaut », b

Afficher : « $\ln 2 - B_n =$ », $\ln 2 - b$

Pour k allant de 1 à n **Faire**

$d = d + \frac{n+3k-4k^2}{(2k-1)\times 2k(n+k)}$

FinPour

Afficher : « La différence $B_n - S_n$ est égale à », d, « ou », $b - s$

Afficher : « La valeur plus précise de ln 2 est », ln 2

Algorithme en langage Python

```
# Créé par user, le 10/08/2021 avec EduPython
from lycee import *

def ln2(n):
    p=1
    r=0
    s=0
    b=0
    d=0

    for k in range(1,n+1): # l'entier k varie de 1 à n
        p=p*2/(1+2**(1/(2**k)))
    print('produit de Seidel = P_',n,'= produit de 2 / [1 + 2**(1/2**k)] pour k = 1 à',n,'vaut',p)
    print('ln(2) - P_',n,'=',ln(2)-p)

    for k in range(n): # l'entier k varie de 0 à n-1
        r=r+1/(n+k)
    print('somme de Riemann R_',n,'= somme de 1/(k+',n,') pour k = 0 à',n-1,'vaut',r)
    print('ln(2) - R_',n,'=',ln(2)-r)


    for k in range(1,n+1): # l'entier k varie de 1 à n
        s=s+1/(n+k)
    print('somme de Riemann S_',n,'= somme de 1/(k+',n,') pour k = 1 à',n,'vaut',s)
    print('ln(2) - S_',n,'=',ln(2)-s)

    for k in range(1,n+1): # l'entier k varie de 1 à n
        b=b+1/((2*k-1)*2*k)
    print('somme de Brouncker = B_',n,'= somme de 1/[(2k-1)*2k] pour k = 1 à',n,'vaut',b)
    print('ln(2) - B_',n,'=',ln(2)-b)

    for k in range(1,n+1): # l'entier k varie de 1 à n
        d=d+(n+3*k-4*k**2)/((2*k-1)*2*k*(n+k))
    print('La différence B_',n,'moins S_',n,'est égale à',d,'ou',b-s)
    # La différence entre les deux sommes précédentes est B_n - S_n = 0

    print('La valeur plus précise de ln(2) est',ln(2))
```

Algorithme en langage Python

```
# Créé par user, le 10/08/2021 avec EduPython
from lycee import *

def ln2(n):
    p=1
    r=0
    s=0
    b=0
    d=0

    for k in range(1,n+1): # l'entier k varie de 1 à n
        p=p*2/(1+2**(1/(2**k)))
    print('produit de Seidel = P_',n,'= produit de 2 / [1 + 2**(1/2**k)] pour k = 1 à',n,'vaut',p)
    print('ln(2) - P_',n,'=',ln(2)-p)

    for k in range(n): # l'entier k varie de 0 à n-1
        r=r+1/(n+k)
    print('somme de Riemann R_',n,'= somme de 1/(k+',n,') pour k = 0 à',n-1,'vaut',r)
    print('ln(2) - R_',n,'=',ln(2)-r)

    for k in range(1,n+1): # l'entier k varie de 1 à n
        s=s+1/(n+k)
    print('somme de Riemann S_',n,'= somme de 1/(k+',n,') pour k = 1 à',n,'vaut',s)
    print('ln(2) - S_',n,'=',ln(2)-s)

    for k in range(1,n+1): # l'entier k varie de 1 à n
        b=b+1/((2*k-1)*2*k)
    print('somme de Brouncker = B_',n,'= somme de 1/[(2k-1)*2k] pour k = 1 à',n,'vaut',b)
    print('ln(2) - B_',n,'=',ln(2)-b)

    for k in range(1,n+1): # l'entier k varie de 1 à n
        d=d+(n+3*k-4*k**2)/((2*k-1)*2*k*(n+k))
    print('La différence B_',n,'moins S_',n,'est égale à',d,'ou',b-s)
    # La différence entre les deux sommes précédentes est B_n - S_n = 0

    print('La valeur plus précise de ln(2) est',ln(2))
```

2. Exécution de l'algorithme ln 2 (n) pour $n = 2^4 = 16$

```
>>> ln2(2**4)
produit de Seidel = P_ 16 = produit de 2 / [1 + 2**(1/2**k)] pour k = 1 à 16 vaut 0.6931508461384654
ln(2) - P_ 16 = -3.6655785201622493e-06
somme de Riemann R_ 16 = somme de 1/(k+ 16 ) pour k = 0 à 15 vaut 0.7090162022075267
ln(2) - R_ 16 = -0.015869021647581416
somme de Riemann S_ 16 = somme de 1/(k+ 16 ) pour k = 1 à 16 vaut 0.6777662022075267
ln(2) - S_ 16 = 0.015380978352418584
somme de Brouncker = B_ 16 = somme de 1/[(2k-1)*2k] pour k = 1 à 16 vaut 0.6777662022075267
ln(2) - B_ 16 = 0.015380978352418584
La différence B_ 16 moins S_ 16 est égale à 4.163336342344337e-17 ou 0.0
La valeur plus précise de ln(2) est 0.6931471805599453
```

Si $n = 2^4 = 16$, $b_n(1)$ représente la somme des aires des $2^4 = 16$ rectangles de $\mathcal{R}_1$ à $\mathcal{R}_{16}$, qui donne une approximation de ln 2.

Ces rectangles sont construits en 4 étapes supplémentaires à partir du rectangle initial $\mathcal{R}_1$.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\frac{1}{90}+\frac{1}{132}+\frac{1}{182}+\frac{1}{240}+\frac{1}{306}$$
$$+\frac{1}{380}+\frac{1}{462}+\frac{1}{552}+\frac{1}{650}+\frac{1}{756}+\frac{1}{870}+\frac{1}{992}$$
$$0.6777662022$$

$$\ln\ 2$$
$$0.6931471806$$

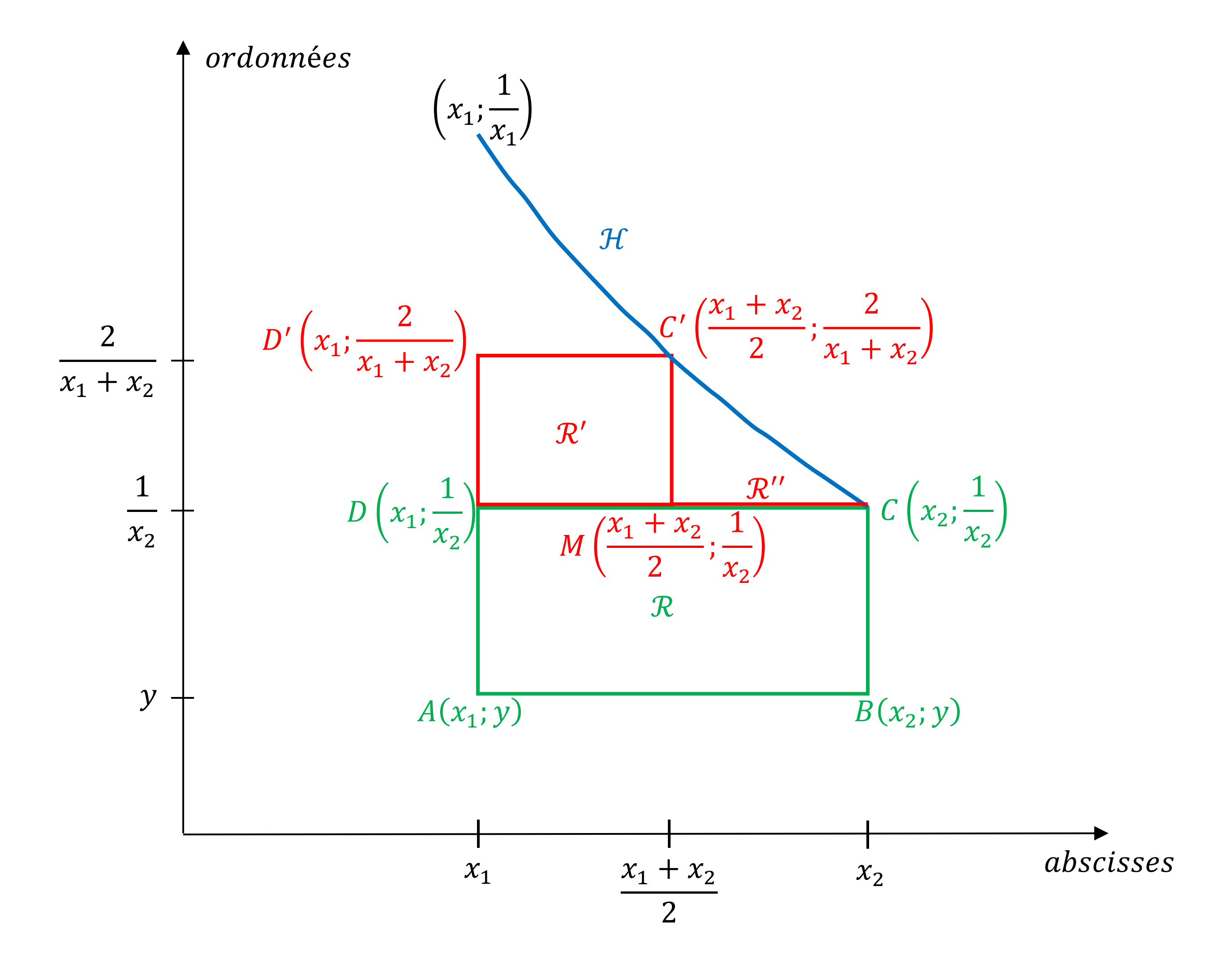
Parmi les quatre valeurs $u_n(1)$, $r_n(2)$, $s_n(2)$, $b_n(1)$, c'est le produit de Seidel $u_n(1)$ qui est le plus proche de $\ln 2 \approx 0{,}6931471806$.

e) Algorithme : fonction récursive utilisant la méthode de Bruncker

La méthode de Bruncker peut être résumée par le schéma ci-dessous.

À partir d'un rectangle $\mathcal{R} = ABCD$ dont le sommet supérieur droit C est sur l'hyperbole $\mathcal{H}$ représentant la fonction inverse, on construit à l'étape suivante le rectangle $\mathcal{R}' = DMC'D'$ et le rectangle aplati $\mathcal{R}'' = MCCM$ dont les sommets supérieurs droits respectifs C' et C sont sur l'hyperbole $\mathcal{H}$, et dont le sommet M est le milieu de $[DC]$.

Remarque : le rectangle $\mathcal{R} = ABCD$ peut être éventuellement aplati. Dans ce cas $A = D$, $B = C$, $\mathcal{R} = DCCD$.



On considère un rectangle $\mathcal{R} = ABCD$, dont les deux sommets inférieurs sont les points de coordonnées $A(x_1; y)$ et $B(x_2; y)$, et dont les deux sommets supérieurs sont les points de coordonnées $C\left(x_2; \frac{1}{x_2}\right)$ et $D\left(x_1; \frac{1}{x_2}\right)$.

On considère la fonction récursive brouncker(x_1, x_2, y, c) suivante, écrite en langage Python, qui renvoie, la somme de l'aire du rectangle $\mathcal{R}$ et de l'aire de tous les rectangles construits au-dessus de lui en c étapes supplémentaires, où $c \in \mathbb{N}$.

Algorithme en langage Python

```
def brouncker(x1,x2,y,c):
# On part d'un rectangle R ayant
# pour sommets inférieurs les points de coordonnées (x1,y) et (x2,y) et
# pour sommets supérieurs les points de coordonnées (x1,1/x2) et (x2,1/x2).
# Son aire vaut le produit de sa base (x2-x1) par sa hauteur (1/x2-y).
# On veut renvoyer la somme de son aire et de l'aire de tous les rectangles
# construits au-dessus de lui en c étapes supplémentaires.
    aire=(x2-x1)*(1/x2-y)
    if c>0:
        aire=aire+brouncker(x1,(x1+x2)/2,1/x2,c-1)
# on ajoute l'aire du rectangle ayant
# pour sommets inférieurs les points de coordonnées (x1,1/x2) et ((x1+x2)/2,1/x2) et
# pour sommets supérieurs les points de coordonnées (x1,2/(x1+x2)) et ((x1+x2)/2,2/(x1+x2).
# Son aire vaut le produit de sa base (x1+x2)/2-x1 par sa hauteur 2/(x1+x2)-1/x2.
        aire=aire+brouncker((x1+x2)/2,x2,1/x2,c-1)
# on ajoute l'aire nulle du rectangle aplati ayant
# pour sommets inférieurs les points de coordonnées ((x1+x2)/2,1/x2) et (x2,1/x2) et
# pour sommets supérieurs les points de coordonnées ((x1+x2)/2,1/x2) et (x2,1/x2).
# Son aire est nulle : elle vaut le produit de sa base x2-(x1+x2)/2 par sa hauteur 1/x2-1/x2 =
    return aire
# on retourne la somme de l'aire du rectangle R initial et de l'aire de tous les rectangles
# construits au-dessus de lui en c étapes supplémentaires.
# Si on part du rectangle initial x1=1, x2=0, y=0,
# le nombre total de rectangles obtenus avec c étapes supplémentaires vaut n = 2**c
# brouncker(1,2,0,c) = B_n renvoyé par ln2(n) avec n = 2**c donc c = ln(n)/ln(2)
```

```
def brouncker(x1,x2,y,c):
# On part d'un rectangle R ayant
# pour sommets inférieurs les points de coordonnées (x1,y) et (x2,y) et
# pour sommets supérieurs les points de coordonnées (x1,1/x2) et (x2,1/x2).
# Son aire vaut le produit de sa base (x2-x1) par sa hauteur (1/x2-y).
# On veut renvoyer la somme de son aire et de l'aire de tous les rectangles
# construits au-dessus de lui en c étapes supplémentaires.
    aire=(x2-x1)*(1/x2-y)
    if c>0:
        aire=aire+brouncker(x1,(x1+x2)/2,1/x2,c-1)
# on ajoute l'aire du rectangle ayant
# pour sommets inférieurs les points de coordonnées (x1,1/x2) et ((x1+x2)/2,1/x2) et
# pour sommets supérieurs les points de coordonnées (x1,2/(x1+x2)) et ((x1+x2)/2,2/(x1+x2).
# Son aire vaut le produit de sa base (x1+x2)/2-x1 par sa hauteur 2/(x1+x2)-1/x2.
        aire=aire+brouncker((x1+x2)/2,x2,1/x2,c-1)
# on ajoute l'aire nulle du rectangle aplati ayant
# pour sommets inférieurs les points de coordonnées ((x1+x2)/2,1/x2) et (x2,1/x2) et
# pour sommets supérieurs les points de coordonnées ((x1+x2)/2,1/x2) et (x2,1/x2).
# Son aire est nulle : elle vaut le produit de sa base x2-(x1+x2)/2 par sa hauteur 1/x2-1/x2 = 0
    return aire
# on retourne la somme de l'aire du rectangle R initial et de l'aire de tous les rectangles
# construits au-dessus de lui en c étapes supplémentaires.
# Si on part du rectangle initial x1=1, x2=0, y=0,
# le nombre total de rectangles obtenus avec c étapes supplémentaires vaut n = 2**c
# brouncker(1,2,0,c) = B_n renvoyé par ln2(n) avec n = 2**c donc c = ln(n)/ln(2)
```

Questions

1. Quel résultat renvoie l'exécution de brouncker$\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4},\frac{1}{2},2\right)$?
   Détailler la procédure suivie par l'ordinateur pour obtenir ce résultat.
   Que représente ce résultat ?
2. Pour tout $c \in \mathbb{N}$, que représente le résultat renvoyé en exécutant brouncker$(1,2,0,c)$?
   Justifier que pour tout $c \in \mathbb{N}$, si $n = 2^c$, l'algorithme $\ln 2\,(n)$ vu dans la partie précédente donne pour $b_n(1)$ le même résultat que brouncker$(1,2,0,c)$.
3. Que vaut brouncker$(1,2,0,c)$ si $c = 4$? Que représente ce résultat ?
   Vérifier que si $c = 4$ donc $n = 2^4 = 16$, l'algorithme $\ln 2\,(16)$ donne pour $b_{16}(1)$ le même résultat que brouncker$(1,2,0,4)$.

Solution

1. Exécutons brouncker$\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4},\frac{1}{2},2\right)$

$$aire = \left(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{56} = \mathcal{A}_4$$

$2 > 0$

On ajoute à $aire$ la valeur brouncker$\left(\frac{3}{2},\frac{\frac{3}{2}+\frac{7}{4}}{2},\frac{4}{7},1\right)$ = brouncker$\left(\frac{3}{2},\frac{13}{8},\frac{4}{7},1\right)$

On ajoute à $aire$ la valeur brouncker$\left(\frac{\frac{3}{2}+\frac{7}{4}}{2},\frac{7}{4},\frac{4}{7},1\right)$ = brouncker$\left(\frac{13}{8},\frac{7}{4},\frac{4}{7},1\right)$

Exécutons brouncker$\left(\frac{3}{2},\frac{13}{8},\frac{4}{7},1\right)$

$$aire = \left(\frac{13}{8}-\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{8}{13}-\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{182} = \mathcal{A}_7$$

$1 > 0$

On ajoute à $aire$ la valeur brouncker$\left(\frac{3}{2},\frac{\frac{3}{2}+\frac{13}{8}}{2},\frac{8}{13},0\right)$ = brouncker$\left(\frac{3}{2},\frac{25}{16},\frac{8}{13},0\right)$

$$aire = \left(\frac{25}{16}-\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{16}{25}-\frac{8}{13}\right) = \frac{1}{650} = \mathcal{A}_{13}$$

Exécutons brouncker$\left(\frac{13}{8},\frac{7}{4},\frac{4}{7},1\right)$

$$aire = \left(\frac{7}{4}-\frac{13}{8}\right)\times\left(\frac{4}{7}-\frac{4}{7}\right) = 0$$

$1 > 0$

On ajoute à $aire$ la valeur brouncker$\left(\frac{13}{8},\frac{\frac{13}{8}+\frac{7}{4}}{2},\frac{4}{7},0\right)$ = brouncker$\left(\frac{13}{8},\frac{27}{16},\frac{4}{7},0\right)$

$$aire = \left(\frac{27}{16}-\frac{13}{8}\right)\times\left(\frac{16}{27}-\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{756} = \mathcal{A}_{14}$$

brouncker$\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4},\frac{1}{2},2\right)$ renvoie

$$\mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_7 + \mathcal{A}_{13} + \mathcal{A}_{14}$$

C'est la somme de l'aire du rectangle $\mathcal{R}_4$ initial et de l'aire des trois rectangles $\mathcal{R}_7$, $\mathcal{R}_{13}$, $\mathcal{R}_{14}$ construits au-dessus de lui en 2 étapes supplémentaires.

```
>>> brouncker(3/2,7/4,1/2,2)
0.026212861212861212
>>> 1/56+1/182+1/650+1/756
0.026212861212861212
```

2. Pour tout $c \in \mathbb{N}$, l'algorithme $\text{brouncker}(1,2,0,c)$ renvoie, à partir du rectangle $\mathcal{R}_1$ de base $2-1=1$ et de hauteur $\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$, la somme de son aire $\frac{1}{2}$ et de l'aire de tous les rectangles construits au-dessus de lui en c étapes supplémentaires. Avec un total $c+1$ étapes, on obtient un total de $n=2^c$ rectangles dont la somme des aires vaut $\text{brouncker}(1,2,0,c)$.

Donc, pour tout $c \in \mathbb{N}$, si $n=2^c$, l'algorithme $\ln 2\,(n)$ donne pour $b_n(1)$ le même résultat que $\text{brouncker}(1,2,0,c)$.

Ce résultat donne une approximation de $\ln 2$, qui est d'autant plus précise que c est grand (donc n est grand).

3. Si le nombre d'étapes supplémentaires vaut $c=4$, on obtient

```
>>> brouncker(1,2,0,4)
0.6777662022075268
```

C'est la somme des aires des $2^4=16$ rectangles de $\mathcal{R}_1$ à $\mathcal{R}_{16}$, construits en 4 étapes supplémentaires à partir de $\mathcal{R}_1$. Cette somme donne une approximation de $\ln 2$.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\frac{1}{90}+\frac{1}{132}+\frac{1}{182}+\frac{1}{240}+\frac{1}{306}+\frac{1}{380}+\frac{1}{462}+\frac{1}{552}+\frac{1}{650}+\frac{1}{756}+\frac{1}{870}+\frac{1}{992}$$

0.6777662022

ln 2

0.6931471806

Si $c=4$ donc $n=2^4=16$, l'algorithme $\ln 2\,(16)$ donne pour $b_{16}(1)$ le même résultat que $\text{brouncker}(1,2,0,4)$.

```
>>> ln2(2**4)
produit de Seidel = P_ 16 = produit de 2 / [1 + 2**(1/2**k)] pour k = 1 à 16 vaut 0.6931508461384654
ln(2) - P_ 16 = -3.6655785201622493e-06
somme de Riemann R_ 16 = somme de 1/(k+ 16 ) pour k = 0 à 15 vaut 0.7090162022075267
ln(2) - R_ 16 = -0.015869021647581416
somme de Riemann S_ 16 = somme de 1/(k+ 16 ) pour k = 1 à 16 vaut 0.6777662022075267
ln(2) - S_ 16 = 0.015380978352418584
somme de Brouncker = B_ 16 = somme de 1/[(2k-1)*2k] pour k = 1 à 16 vaut 0.6777662022075267
ln(2) - B_ 16 = 0.015380978352418584
La différence B_ 16 moins S_ 16 est égale à 4.163336342344337e-17 ou 0.0
La valeur plus précise de ln(2) est 0.6931471805599453
```

```
>>> brouncker(1,2,0,4)
0.6777662022075268
```

f) Annexe : égalité de la somme de Brouncker et de la somme de Riemann

Théorème
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme de Brouncker b_n et la somme de Riemann s_n, définies par :

$$b_n = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1) \times 2k}$$

et

$$s_n = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Alors on a les propriétés suivantes :

1) $b_1 = s_1 = \frac{1}{2}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_{n+1} - b_n = s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = s_n$$

Démonstration

Vérifions d'abord l'égalité des différentes écritures de b_n et de s_n.

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1) \times 2k} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \times 2n}$$

Une autre écriture de cette somme est

$$b_n = \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{(-1)^i}{i+1} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$$

En effet,

$$b_n = \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{(-1)^i}{i+1} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{2n-1} \frac{(-1)^i}{i+1} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{(-1)^i}{i+1} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{2n-2} \frac{(-1)^i}{i+1} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{(-1)^i}{i+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-2}}{2k-2+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1) \times 2k}$$

La somme de Riemann vaut

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

En effectuant le changement de variable $i = k + n$ dans s_n, k varie de 1 à n, donc $i = k + n$ varie de $1 + n$ à $n + n = 2n$. Donc une autre écriture possible de cette somme est

$$s_n = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$$

1) Montrons que $\boldsymbol{b_1 = s_1 = \frac{1}{2}}$

$$b_1 = \sum_{j=1}^{2\times 1} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \frac{(-1)^{1+1}}{1} + \frac{(-1)^{2+1}}{2} = \frac{1}{1} + \frac{-1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$s_1 = \sum_{i=1+1}^{2\times 1} \frac{1}{i} = \sum_{i=2}^{2} \frac{1}{i} = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = s_1 = \frac{1}{2}$$

2) Montrons que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$,

$$\boldsymbol{b_{n+1} - b_n = s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}$$

Preuve :

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2(n+1)}$$
$$= b_n + \frac{1}{2n+2-1} - \frac{1}{2n+2} = b_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$\boldsymbol{b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}$$

ou bien

$$b_n = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$$

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \sum_{j=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} + \frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2}$$
$$= b_n + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = b_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$\boldsymbol{b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

$$s_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k+1}$$

On effectue le changement de variable $i=k+1$. Lorsque k varie de 1 à $n+1$, $i=k+1$ varie de $1+1=2$ à $n+1+1=n+2$.

$$s_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k+1}=\sum_{i=2}^{n+2}\frac{1}{n+i}=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\sum_{i=2}^{n+2}\frac{1}{n+i}=-\frac{1}{n+1}+\sum_{i=1}^{n+2}\frac{1}{n+i}$$
$$=-\frac{1}{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}+\frac{1}{n+n+1}+\frac{1}{n+n+2}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=s_n+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2\times 1}{2\times(n+1)}$$
$$=s_n+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2}{2(n+1)}=s_n+\frac{1}{2n+1}+\frac{1-2}{2n+2}$$
$$=s_n+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$

$$\boldsymbol{s_{n+1}-s_n=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}$$

ou bien

$$s_n=\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}$$

$$s_{n+1}=\sum_{i=n+1+1}^{2(n+1)}\frac{1}{i}=\sum_{i=n+2}^{2n+2}\frac{1}{i}=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\sum_{i=n+2}^{2n+2}\frac{1}{i}=-\frac{1}{n+1}+\sum_{i=n+1}^{2n+2}\frac{1}{i}$$
$$=-\frac{1}{n+1}+\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=-\frac{1}{n+1}+s_n+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$
$$=s_n+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2\times 1}{2\times(n+1)}=s_n+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2}{2(n+1)}$$
$$=s_n+\frac{1}{2n+1}+\frac{1-2}{2n+2}=s_n+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$

$$\boldsymbol{s_{n+1}-s_n=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{b_{n+1}-b_n=s_{n+1}-s_n=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}$$

3) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boldsymbol{b_n = s_n}$$

On a montré que :

1) $b_1 = s_1 = \frac{1}{2}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_{n+1} - b_n = s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_{n+1} - s_{n+1} = b_n - s_n = b_1 - s_1 = 0$$

Donc

$$b_n = s_n$$

Voici une démonstration directe du point 3 (sans utiliser les points 1 et 2)

http://ww2.ac-poitiers.fr/math/sites/math/IMG/pdf/H-Tarfaoui-9.pdf

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = s_n$$

$$\boldsymbol{b_n = s_n}$$

Application de l'égalité $b_n = s_n$

Exercice 1

XXIe Olympiades internationales de mathématiques : exercice 1 du sujet du 2 juillet 1979

http://imo-official.com/problems.aspx

Soient a et b des entiers strictement positifs vérifiant :

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{1317} - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

Montrer que 1979 divise a.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = s_n$$

où

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

et

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

En particulier, si $n = \frac{1318}{2} = 659$,

$$b_{659} = s_{659}$$

La somme de Brouncker augmentée de $\frac{1}{1319}$

$$b_{659} + \frac{1}{1319} = \sum_{k=1}^{659} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{1317} - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \frac{a}{b}$$

est égale à la somme de Riemann augmentée de $\frac{1}{1319}$

$$s_{659} + \frac{1}{1319} = \sum_{k=1}^{659} \frac{1}{659+k} = \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \frac{1}{662} + \cdots + \frac{1}{1317} + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \frac{1}{662} + \cdots + \frac{1}{1317} + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} \\ + \frac{1}{1319} + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1317} + \cdots + \frac{1}{662} + \frac{1}{661} + \frac{1}{660} \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \frac{1}{662} + \cdots + \frac{1}{1317} + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} \\ + \frac{1}{1319} + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1317} + \cdots + \frac{1}{662} + \frac{1}{661} + \frac{1}{660} \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319} + \frac{1}{661} + \frac{1}{1318} + \frac{1}{662} + \frac{1}{1317} + \cdots + \frac{1}{1317} + \frac{1}{662} + \frac{1}{1318} + \frac{1}{661} + \frac{1}{1319} + \frac{1}{660}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1979}{660 \times 1319} + \frac{1979}{661 \times 1318} + \frac{1979}{662 \times 1317} + \cdots + \frac{1979}{1317 \times 662} + \frac{1979}{1318 \times 661} + \frac{1979}{1319 \times 666}\right) = 1979 \times \frac{p}{q}$$

où p et q sont des entiers naturels vérifiant

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{660\times 1319}+\frac{1}{661\times 1318}+\frac{1}{662\times 1317}+\cdots+\frac{1}{1317\times 662}+\frac{1}{1318\times 661}+\frac{1}{1319\times 666}\right)$$

L'égalité $b_{659}=s_{659}$ implique l'égalité

$$\frac{a}{b}=1979\times\frac{p}{q}$$

Donc

$$a\times q=1979\times p\times b$$

Donc 1979 divise $a\times q$:

$$\frac{a\times q}{1979}=p\times b$$

Or 1979 est un nombre premier

https://www.nombres-premiers.fr/liste.html

https://www.nombres-premiers.fr/1979.html

1979 ne divise pas q, car q est formé d'entiers naturels strictement inférieurs à 1979.

1979 et q sont premiers entre eux

On utilise le théorème de Gauss :

Théorème de Gauss Soit a, b, c trois entiers relatifs, avec a et b non nuls. Si a divise le produit bc, et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1979 divise le produit $a\times q$, et 1979 et q sont premiers entre eux, donc 1979 divise a.

Exercice 2 (inspiré de l'exercice 1)

Énoncé : http://ww2.ac-poitiers.fr/math/spip.php?article434

Solution : http://ww2.ac-poitiers.fr/math/sites/math/IMG/pdf/H-Tarfaoui-9.pdf

http://ww2.ac-poitiers.fr/math/sites/math/IMG/pdf/W-Mesnier.pdf

Soient a et b des entiers strictement positifs vérifiant :

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{1329} - \frac{1}{1330} + \frac{1}{1331}$$

Montrer que 1997 divise a.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = s_n$$

où

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

et

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

En particulier, si $n = \frac{1330}{2} = 665$,

$$b_{665} = s_{665}$$

La somme de Brouncker augmentée de $\frac{1}{1331}$

$$b_{665} + \frac{1}{1331} = \sum_{k=1}^{665} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{1329} - \frac{1}{1330} + \frac{1}{1331} = \frac{a}{b}$$

est égale à la somme de Riemann augmentée de $\frac{1}{1331}$

$$s_{665} + \frac{1}{1331} = \sum_{k=1}^{665} \frac{1}{665+k} = \frac{1}{666} + \frac{1}{667} + \frac{1}{668} + \cdots + \frac{1}{1329} + \frac{1}{1330} + \frac{1}{1331}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \frac{1}{666} + \frac{1}{667} + \frac{1}{668} + \cdots + \frac{1}{1329} + \frac{1}{1330} + \frac{1}{1331} \\ + \frac{1}{1331} + \frac{1}{1330} + \frac{1}{1329} + \cdots + \frac{1}{668} + \frac{1}{667} + \frac{1}{666} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \frac{1}{666} + \frac{1}{667} + \frac{1}{668} + \cdots + \frac{1}{1329} + \frac{1}{1330} + \frac{1}{1331} \\ + \frac{1}{1331} + \frac{1}{1330} + \frac{1}{1329} + \cdots + \frac{1}{668} + \frac{1}{667} + \frac{1}{666} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{666} + \frac{1}{1331} + \frac{1}{667} + \frac{1}{1330} + \frac{1}{668} + \frac{1}{1329} + \cdots + \frac{1}{1329} + \frac{1}{668} + \frac{1}{1330} + \frac{1}{667} + \frac{1}{1331} + \frac{1}{666} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1997}{666 \times 1331} + \frac{1997}{667 \times 1330} + \frac{1997}{668 \times 1329} + \cdots + \frac{1997}{1329 \times 668} + \frac{1997}{1330 \times 667} + \frac{1997}{1331 \times 666} \right) = 1997 \times \frac{p}{q}$$

où p et q sont des entiers naturels vérifiant

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{666 \times 1331} + \frac{1}{667 \times 1330} + \frac{1}{668 \times 1329} + \cdots + \frac{1}{1329 \times 668} + \frac{1}{1330 \times 667} + \frac{1}{1331 \times 666}\right)$$

L'égalité $b_{665} = s_{665}$ implique l'égalité

$$\frac{a}{b} = 1997 \times \frac{p}{q}$$

Donc

$$a \times q = 1997 \times p \times b$$

Donc 1997 divise $a \times q$:

$$\frac{a \times q}{1997} = p \times b$$

Or 1997 est un nombre premier

https://www.nombres-premiers.fr/liste.html

https://www.nombres-premiers.fr/1997.html

1997 ne divise pas q, car q est formé d'entiers naturels strictement inférieurs à 1997.

1997 et q sont premiers entre eux

On utilise le théorème de Gauss :

Théorème de Gauss
Soit a, b, c trois entiers relatifs, avec a et b non nuls.
Si a divise le produit bc, et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1997 divise le produit $a \times q$, et 1997 et q sont premiers entre eux, donc 1997 divise a.